PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINIER KOMPLEKS MENGGUNAKAN METODE ITERASI *GAUSS-SEIDEL*

TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Jurusan Matematika

Oleh :

ELPINA RIKARTI
10854004562

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2013

PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINIER KOMPLEKS MENGGUNAKAN METODE ITERASI *GAUSS-SEIDEL*

ELPINA RIKARTI
10854004562

Tanggal Sidang : 01 Juli 2013
Tanggal Wisuda : 2013

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No.155 Pekanbaru

ABSTRAK

Sistem Persamaan Linier (SPL) dapat dibentuk ke dalam persamaan matriks $AX = B$. Koefisien pada sistem persamaan linier ada yang berbentuk bilangan riil, bilangan kompleks dan bilangan *fuzzy*. Sistem persamaan linier kompleks dapat diselesaikan dengan menggunakan metode iterasi *Gauss-Seidel*. Metode iterasi *Gauss-Seidel* merupakan metode penyelesaian persamaan serentak melalui proses iterasi dengan menggunakan nilai awal pada prosesnya sehingga diperoleh nilai yang sesungguhnya dan syarat persamaan tersebut haruslah dominan secara diagonal. Penyelesaian sistem persamaan linier kompleks menggunakan metode iterasi *Gauss-Seidel* adalah solusi tunggal.

Kata Kunci: Bilangan Kompleks, Iterasi *Gauss-Seidel*, Konjugat Kompleks, Sistem Persamaan Linier Kompleks.

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirabbil'alamin.

Puji syukur penulis ucapkan kehadirat Allah SWT karena atas segala limpahan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir dengan judul **"Penyelesaian Sistem Persamaan Linier Kompleks Menggunakan Metode Iterasi *Gauss-Seidel*"**. Penulisan tugas akhir ini dimaksudkan untuk memenuhi salah satu syarat dalam rangka menyelesaikan studi Strata 1 (S1) di Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Shalawat beserta salam semoga tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW, mudah-mudahan kita semua selalu mendapat syafa'at dan dalam lindungan Allah SWT amin.

Dalam penyusunan dan penyelesaian tugas akhir ini, penulis tidak terlepas dari bantuan berbagai pihak, baik langsung maupun tidak langsung. Untuk itu penulis mengucapkan terimakasih yang tak terhingga kepada kedua orang tua tercinta ayahanda dan ibunda (Syafruddin.M dan Roslaini) yang tidak pernah lelah dalam mencurahkan kasih sayang, perhatian, do'a, dan dukungan untuk menyelesaikan tugas akhir ini. Selanjutnya ucapan terimakasih kepada :

1. Bapak Prof. Dr. H. M. Nazir selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Ibu Dra. Hj. Yenita Morena, M.Si selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Ibu Sri Basriati, M.Sc selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
4. Ibu Fitri Aryani, M.Sc selaku pembimbing tugas akhir yang telah banyak membantu, mengarahkan, mendukung, dan membimbing penulis dengan penuh kesabarannya dalam penulisan tugas akhir ini.
5. Ibu Yuslenita Muda, M.Sc selaku penguji I yang telah banyak membantu, memberikan kritikan dan saran serta dukungan dalam penulisan tugas akhir ini.
6. Bapak M. Nizam Muhaijir, S.Si selaku penguji II yang telah banyak membantu, mendukung dan memberikan saran dalam penulisan tugas akhir ini.

7. Semua dosen-dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan dukungan serta saran dalam menyelesaikan tugas akhir ini.

Dalam penyusunan tugas akhir ini penulis telah berusaha semaksimal mungkin. Walaupun demikian tidak tertutup kemungkinan adanya kesalahan dan kekurangan baik dalam penulisan maupun dalam penyajian materi. Untuk itu penulis mengharapkan kritik dan saran dari berbagai pihak demi kesempurnaan tugas akhir ini.

Pekanbaru,   Juli 2013

Elpina Rikarti

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Sistem persamaan linier memegang peranan yang penting dalam ilmu aljabar linier. Suatu sistem persamaan linier terdiri atas *m* persamaan linier dan *n* variabel. Penyelesaikan suatu sistem persamaan linier adalah mencari nilai dari variabel-variabel yang memenuhi semua persamaan linier yang diberikan. Koefisien pada sistem persamaan linier ada yang berbentuk bilangan riil, bilangan kompleks dan bilangan *fuzzy*. Sistem persamaan linier yang berkoefisien bilangan riil telah banyak dipelajari dan diteliti dengan menggunakan berbagai metode. Pada penelitian ini yang akan diteliti adalah sistem persamaan linier kompleks.

Penyelesaian masalah sistem persamaan linier dapat dilakukan dengan metode langsung yaitu dengan cara Operasi Baris Elementer (OBE), aturan Cramer, eliminasi *Gauss* dan *Gauss-Jordan*. Secara tidak langsung yaitu dengan metode iterasi. Ada beberapa metode iterasi yang dapat menyelesaikan sistem persamaan linier yaitu iterasi *Jacobi*, metode SOR dan iterasi *Gauss-Seidel*. Metode *Gauss-Seidel* adalah metode penyelesaian persamaan serentak melalui proses iterasi sehingga diperoleh nilai sesungguhnya dengan menggunakan nilai awal pada proses selanjutnya menggunakan nilai yang sudah diketahui sebelumnya. Iterasi *Gauss-Seidel* mempunyai kelebihan dan kekurangan sama seperti iterasi *Jacobi*. Iterasi *Gauss-Seidel* proses iterasinya lebih cepat daripada metode *Jacobi*. Metode *Gauss-Seidel* dikenalkan oleh Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) dan Philipp Ludwig von Seidel (1821-1896).

Iterasi *Gauss-Seidel* telah digunakan oleh beberapa peneliti sebelumnya, diantaranya oleh Juanda Rovelim (2006) yang menyelesaikan linier simultan dengan membandingkan Eliminasi Gauss, *Gauss-Seidel* dan Steepest Decent. Selanjutnya oleh Khairuddin (2006) yang menggunakan iterasi *Gauss-Seidel* pada pengaruh struktur matriks iterasi.

Sistem persamaan linier kompleks telah digunakan oleh Nicholson (2001) yang menyelesaikan sistem persamaan linier kompleks dengan menggunakan Operasi Baris Elementer (OBE).

Berdasarkan uraian di atas, maka penulis tertarik untuk menggunakan iterasi *Gauss-Seidel* dalam menyelesaikan sistem persamaan linier kompleks. Sehingga pada Tugas Akhir ini penulis melakukan penelitian dengan judul **"Penyelesaian Sistem Persamaan Linier Kompleks Menggunakan Metode Iterasi *Gauss-Seidel*".**

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dikemukakan sebelumnya, maka penulis dapat merumuskan suatu masalah yaitu: "Bagaimana menyelesaikan sistem persamaan linier kompleks menggunakan metode Iterasi *Gauss-Seidel*".

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini adalah:

1. Sistem persamaan linier dengan *m* persamaan dan *n* variabel yaitu, $m = n = 4$ dan $m = n = 5$.
2. Sistem persamaan linier kompleks yang digunakan adalah sistem persamaan linier kompleks yang berkoefisien bilangan kompleks penuh dengan bentuk kompleks $x + iy$ dengan $x, y \neq 0$ dan berkonstanta bilangan kompleks.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan yang ingin dicapai dari penulisan tugas akhir ini adalah mendapatkan solusi dari sistem persamaan linier kompleks dengan 4 persamaan 4 variabel dan 5 persamaan 5 variabel menggunakan metode iterasi *Gauss-Seidel*.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penulisan tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Untuk memperdalam pemahaman penulis mengenai materi tentang sistem persamaan linier kompleks.

2. Mengembangkan wawasan di bidang matematika khususnya mengenai sistem persamaan linier kompleks dan iterasi *Gaus-Seidel*.
3. Memberikan informasi kepada pembaca bahwa metode iterasi *Gauss-Seidel* dapat juga digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linier kompleks.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

BAB I Pendahuluan

Bab ini berisikan latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penulisan dan sistematika penulisan.

BAB II Landasan Teori

Bab ini berisikan tentang sistem persamaan linier, sistem persamaan linier riil, bilangan kompleks, sistem persamaan linier kompleks, konjugat kompleks, iterasi *Gauss-Seidel*.

BAB III Metodologi Penelitian

Bab ini berisikan langkah-langkah dalam menyelesaikan sistem persamaan linier kompleks dengan menggunakan metode iterasi *Gauss-Seidel*.

BAB IV Pembahasan

Bab ini berisikan pemaparan bagaimana metode iterasi *Gauss-Seidel* dapat digunakan untuk menyelesaikan suatu sistem persamaan linier kompleks.

BAB V Kesimpulan dan Saran

Bab ini berisikan kesimpulan dari hasil dan pembahasan yang telah dilakukan pada bab IV dan saran dari penulis.

BAB II

LANDASAN TEORI

Bab II ini membahas teori-teori pendukung yang digunakan untuk pembahasan selanjutnya yaitu tentang sistem persamaan linier, sistem persamaan linier riil, sistem persamaan linier kompleks, bilangan kompleks, konjugat kompleks, iterasi *Gauss-Seidel.*

2.1 Sistem Persamaan Linier

Sistem persamaan linier adalah sekumpulan persamaan linier yang terdiri dari *m* persamaan $(L_1, L_2, \dots, L_m)$, dengan n variabel yang tidak diketahui yaitu $x_1, x_2, \dots, x_n$, dapat disusun dalam bentuk:

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{matrix} \qquad (2.1)$$

dengan a_{ij} dan b_i adalah konstanta. Huruf a_{ij} adalah *koefisien* dari variabel tidak diketahui x_j pada persamaan L_i, dan bilangan b_i adalah *konstanta* dari persamaan L_i.

Sistem persamaan (2.1) disebut sistem persamaan *homogen* jika semua suku konstantanya adalah nol, yaitu jika $b_1 = 0$, $b_2 = 0$, ..., $b_m = 0$. Jika tidak maka sistem itu disebut sistem persamaan *nonhomogen*. Solusi sistem persamaan linier (2.1) adalah sejumlah nilai untuk variabel-variabel yang tidak diketahui.

Sistem persamaan linier pada persamaan (2.1) yang terdiri dari m persamaan linier dengan n variabel tidak diketahui ekuivalen dengan persamaan matriks

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix} \quad \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} = \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix} \quad \text{atau} \quad AX = B \qquad (2.2)$$

dengan $A = a_{ij}$ adalah matriks koefisien, $X = x_j$ adalah vektor kolom dari variabel-variabel tidak diketahui, dan $B = b_i$ adalah vektor kolom dari kostanta.

Beberapa bentuk pemecahan atau solusi dari sistem persamaan linier adalah sebagai berikut:

1. Solusi tunggal

   Dikatakan memiliki solusi tunggal apabila terdapat satu titik potong dari sistem persamaan linier.

2. Banyak solusi

   Dikatakan memiliki banyak solusi apabila terdapat banyak titik potong dari sistem persamaan linier.

3. Tidak ada solusi

   Dikatakan tidak ada solusi apabila tidak ada titik potong dari sistem persamaan linier.

2.2 Sistem Persamaan Linier Riil

Sistem persamaan linier riil merupakan sistem persamaan linier dengan koefisien bilangan riil. Metode dasar yang sering digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linier riil adalah Operasi Baris Elementer (OBE). OBE merupakan suatu metode untuk menyelesaikan sistem persamaan linier dengan menerapkan tiga tipe operasi yaitu mengalikan sebuah baris dengan sebuah konstanta yang taksama dengan nol, menukarkan dua baris dan menambahkan perkalian dari satu baris pada baris yang lainnya. Selanjutnya, akan diberikan contoh penyelesaian sistem persamaan linier riil.

Contoh 2.1:

Selesaikan sistem persamaan linier berikut:

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\
x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \\
x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4
\end{aligned}
$$

Penyelesaian:

$$\begin{matrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{matrix}$$

Dengan menggunakan penyelesaian Operasi Baris Elementer pada matriks 3×3 sehingga didapatkan:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{matrix}$$

Jadi, solusi dari sistem persamaan linier di atas adalah solusi tunggal dengan $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, dan $x_3 = 2$.

2.3 Bilangan Kompleks

Definisi 2.2 (Churchill, R, 1990): bilangan kompleks z dapat didefinisikan sebagai pasangan berurut $z = (x, y)$ dengan $x, y \in R$. Himpunan bilangan kompleks dilambangkan dengan *C*. Dalam bilangan kompleks, notasi i biasa digunakan sebagai lambang dari bilangan imajiner dengan nilai $i = \sqrt{-1}$.

Apabila diberikan $x + iy$ maka:

i. Bagian riil z atau Re $z = x$

ii. Bagian imajiner z atau Im $z = y$

Operasi aljabar dan sifat-sifat aljabar terhadap bilangan kompleks:

1) Opersai Aljabar

   a. Operasi Penjumlahan

   $$z_1 + z_2 = x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2$$
   $$= x_1 + x_2 + i\ y_1 + y_2$$

   b. Operasi Pengurangan

   $$z_1 - z_2 = x_1 + iy_1 - x_2 + iy_2$$
   $$= x_1 - x_2 + i\ y_1 - y_2$$

   c. Operasi Perkalian

   $$z_1 z_2 = x_1 + iy_1 \times x_2 + iy_2$$
   $$= (x_1x_2 + ix_1y_2) + (ix_2y_1 + i^2y_1y_2)$$

$$= \quad x_1x_2 - \; y_1y_2 \;\; + \; i \;\; x_1y_2 + \; x_2y_1$$

d. Operasi Pembagian

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + \; iy_1}{x_2 + \; iy_2}$$

$$= \frac{(x_1 + \; iy_1)}{(x_2 + \; iy_2)} \frac{(x_2 - \; iy_2)}{(x_2 - \; iy_2)}$$

$$= \frac{x_1x_2 + \; y_1y_2}{{x_2}^2 + \; {y_2}^2} + \; i \frac{x_2y_1 - \; x_1y_2}{{x_2}^2 + \; {y_2}^2}$$

2) Sifat-sifat Aljabar

a. Hukum Komutatif

$$z_1 + \; z_2 = \;\; z_2 + \; z_1$$

$$z_1z_2 = \;\; z_2z_1$$

b. Hukum Asosiatif

$$z_1 + \; z_2 \;\; + \; z_3 = \; z_1 + \;\;\; z_2 + \; z_3$$

$$z_1z_2 \;\; z_3 = \; z_1 \;\; z_2z_3$$

c. Hukum Distributif

$$z \;\; z_1 + \; z_2 \;\; = \; zz_2 + \; zz_2$$

d. $\frac{z_1}{z_2} = \; zz^{-1} = \; z_1 \;\; \frac{1}{z_2}$

i. $\frac{1}{z_1z_2} = \quad \frac{1}{z_1} \quad \frac{1}{z_2}$

ii. $\frac{z_1+z_2}{z_3} = \frac{z_1}{z_3} + \frac{z_2}{z_3}$

Contoh 2.2:

Diberikan dua buah bilangan kompleks sebagai berikut:

$z_1 = \; 8 + \; 7i$ dan $z_2 = \; 9 - \; 2i$

Akan ditentukan penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian dari dua buah bilangan kompleks z_1 dan z_2.

Penyelesaian:

1. Penjumlahan

$$z_1 + \; z_2 = \quad 8 + \; 7i \;\; + \; (9 - \; 2i)$$

$$= \quad 8 + \; 9 \;\; + \; i(7 - \; 2)$$

$$= \; 17 + \; 5i$$

2. Pengurangan

$$z_1 - z_2 = \ \ 8 + 7i \ \ - (9 - 2i)$$

$$= \ \ 8 - 9 \ \ + i \ 7 - \ \ -2$$

$$= -1 + 9i$$

3. Perkalian

$$z_1 . z_2 = \ \ 8 + 7i \ (9 - 2i)$$

$$= 72 - 16i + 63i + 14$$

$$= 86 - 47i$$

4. Pembagian

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{8 + 7i}{9 - 2i} . \frac{9 + 2i}{9 + 2i}$$

$$= \frac{72 + 16i + 63i + 14i^2}{81 + 18i - 18i - 4i^2}$$

$$= \frac{72 + 79i - 14}{85}$$

$$= \frac{58}{85} + \frac{79}{85} i$$

2.4 Sistem Persamaan Linier Kompleks

Definisi 2.1 (Taher dkk, 2009): Sistem persamaan linier kompleks merupakan sistem persamaan linier dengan koefisiennya adalah bilangan kompleks. Di dalam sistem persamaan linier kompleks terdapat bilangan-bilangan kompleks. Bilangan-bilangan kompleks tersebut dapat ditulis sebagai berikut:

$$C_{ij} = p_{ij} + iq_{ij}$$

$$Z_i = x_i + iy_i$$

$$W_i = u_i + iv_i$$

Langkah awal yang dilakukan untuk mencari solusi sistem persamaan linier kompleks adalah mengubah matriks koefisien A yang berukuran $n \times n$ menjadi matriks yang berukuran $2n \times 2n$. Untuk mengubah matriks A menjadi matriks yang berukuran $2n \times 2n$, maka digunakan persamaan berikut:

$$\sum_{j=1}^{n} C_{ij} \quad Z_i = W_i \tag{2.3}$$

Persamaan di atas dapat dijabarkan menjadi:

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} + iq_{ij} \quad x_i + iy_i = u_i + iv_i \tag{2.4}$$

dengan,

$V = \quad v_i$

$U = \quad u_i$

$P = \quad p_{ij}$

$Q = \quad q_{ij}$

$X = \quad x_i$

$$Y = \quad y_i \text{ untuk } i, j = 1, 2, \cdots, n \tag{2.5}$$

Berdasarkan persamaan (2.5) didapatkan matriks baru yang berukuran $2n \times 2n$ sebagai berikut:

$$\begin{matrix} P & -Q \\ Q & P \end{matrix} \quad \begin{matrix} X \\ Y \end{matrix} = \begin{matrix} U \\ V \end{matrix} \tag{2.6}$$

2.5 Konjugat Kompleks

Konjugat kompleks $\bar{z}$ dari bilangan kompleks $z = x + iy$ didefinisikan sebagai: $\bar{z} = x - iy$. Perkalian antara bilangan kompleks dengan konjugat kompleksnya didefinisikan sebagai:

$$z\bar{z} = \quad x + iy \quad x - iy \quad = x^2 + y^2$$

Modulus bilangan kompleks z didefinisikan sebagai:

$$\begin{aligned} |z|^2 &= z\bar{z} \\ &= (x + iy)(x - iy) \\ &= x^2 + y^2 \\ |z| &= \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Contoh 2.3:

Diberikan bilangan kompleks dengan konjugat kompleksnya sebagai berikut:

$$z = 3 + 2i \quad \text{dan} \quad \bar{z} = 3 - 2i$$

Akan ditentukan perkalian antara bilangan kompleks dengan konjugat kompleksnya.

Penyelesaian:

Menentukan perkalian antara bilangan kompleks dengan konjugat kompleksnya:

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= (3 + 2i)(3 - 2i) \\ &= 9 - 6i + 6i + 4 \\ &= 13 \end{aligned}$$

2.6 Metode Iterasi Gauss-Seidel

Definisi 2.3 (Munif dkk, 1995): Iterasi *Gauss-Seidel* adalah metode penyelesaian persamaan serentak melalui proses iterasi. Metode iterasi *Gauss-Seidel* merupakan proses rekursi berulang untuk mendekati bilangan yang tidak diketahui (x). Sebagai titik awal pada proses rekursi tersebut diperlukan nilai awal dan biasanya adalah $x = 0$. Pada proses selanjutnya nilai yang sudah diketahui tahap sebelumnya x_1 dipergunakan untuk mencari nilai pada tahap berikutnya x_2. Proses tersebut terus berulang hingga diperoleh nilai x yang sesungguhnya atau berhenti jika toleransi kesalahan tertentu telah dicapai.

Sekumpulan persamaan linier berikut:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Persamaan ke-i dari persamaan di atas adalah $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{ii}x_i + \cdots + a_{1n}x_n = b_n$ dengan $i = 1,2,3,\cdots,k$.

Dengan demikian metode *Gauss-Seidel* diekspresikan sebagai:

$$x_i^{(n+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{\ n+1} - \sum_{j=i+1}^{N} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(n)} \qquad (2.7)$$

dengan, $n = 1,2,3,\cdots,k$.

Untuk menyelesaikan sistem persamaan dengan metode *Gauss-Seidel* diperlukan suatu nilai pendekatan awal yaitu x_0, biasanya tidak diketahui dan kita pilih $x_0 = 0$. Oleh karena itu, syarat cukup agar metode *Gauss-Seidel* konvergen adalah:

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ ,\ i = 1,2,3,\cdots,n \qquad (2.8)$$

Dengan kata lain metode *Gauss-Seidel* akan konvergen jika koefisien matriks dominan secara diagonal.

Contoh 2.4:

Selesaikan sistem persamaan linier berikut dengan menggunakan iterasi *Gauss-Seidel*, dengan nilai titik awal variabel yaitu $x_1^0 = x_2^0 = x_3^0 = x_4^0 = x_5^0 = 0$.

$$\begin{aligned}
8x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 &= 20\\
4x_1 + 9x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 50\\
3x_1 + x_2 + 7x_3 + x_4 + x_5 &= 32\\
x_1 + x_2 + x_3 + 8x_4 + 2x_5 &= 40\\
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 9x_5 &= 45
\end{aligned}$$

Penyelesaian:

Berdasarkan sistem persamaan linier tersebut diperoleh matriks A yaitu:

$$A = \begin{matrix} 8 & 1 & 2 & 3 & 1\\ 4 & 9 & 1 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 7 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 1 & 8 & 2\\ 1 & 2 & 3 & 2 & 9 \end{matrix}$$

dengan matriks variabel x adalah:

$$x = \begin{matrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5 \end{matrix}$$

matriks konstanta b adalah:

$$b = \begin{matrix} 20 \\ 50 \\ 32 \\ 40 \\ 45 \end{matrix}$$

Sehingga, $AX = B$

$$\begin{matrix} 8 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 9 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 7 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 9 \end{matrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{matrix} = \begin{matrix} 20 \\ 50 \\ 32 \\ 40 \\ 45 \end{matrix}$$

Terakhir kita iterasikan menggunakan persamaan (2.7) dengan syarat harus memenuhi persamaan (2.8) akan diperoleh nilai:

Iterasi 1:

$$x_1^1 = \frac{20}{8}(-x_2^0 - 2x_3^0 - 3x_4^0 - x_5^0) = \frac{20}{8}(-0 - 0 - 0 - 0)$$

$$= 2.5$$

$$x_2^1 = \frac{50}{9}(-4x_1^1 - x_3^0 - x_4^0 - x_5^0) = \frac{50}{9}(-4\ 2.5\ - 0 - 0 - 0)$$

$$= 4.4444$$

$$x_3^1 = \frac{32}{7}(-3x_1^1 - x_2^1 - x_4^0 - x_5^0) = \frac{32}{7}(-3\ 2.5\ - 4.44444 - 0 - 0)$$

$$= 2.8651$$

$$x_4^1 = \frac{40}{8}(-3x_1^1 - x_2^1 - x_3^1 - 2x_5^0) = \frac{40}{8}(-2.5 - 4.4444 - 2.8651 - 0)$$

$$= 3.7738$$

$$x_5^1 = \frac{45}{9}(-x_1^1 - 2x_2^1 - 3x_3^1 - 2x_4^1)$$

$$= \frac{45}{9}(-2.5 - 2\ 4.4444\ - 3\ 2.8651\ - 2\ 3.7738\ )$$

$$= 1.9409$$

Selanjutnya mencari nilai iterasi ke 2 menggunakan persamaan (2.7) dengan syarat harus memenuhi persamaan (2.8) akan diperoleh nilai:

Iterasi 2:

$$x_1^2 = \frac{20}{8}(-x_2^1 - 2x_3^1 - 3x_4^1 - x_5^1)$$

$$= \frac{20}{8}(-4.4444 - 2\ 2.8651\ - 3\ 3.7738\ - 1.9409)$$

$$= -0.4296$$

$$x_2^2 = \frac{50}{9}(-4x_1^2 - x_3^1 - x_4^1 - x_5^1)$$

$$= \frac{50}{9}(-4\ -0.4296\ - 2.8651 - 3.7738 - 1.9409)$$

$$= 4.7932$$

$$x_3^2 = \frac{32}{7}(-3x_1^2 - x_2^2 - x_4^1 - x_5^1)$$

$$= \frac{32}{7}(-3\ -0.4296\ - 4.7932 - 3.7738 - 1.9409)$$

$$= 3.2544$$

$$x_4^2 = \frac{40}{8}(-3x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - 2x_5^1)$$

$$= \frac{40}{8}(-\ -0.4296\ - 4.7932 - 3.2544 - 2\ 1.9409\ )$$

$$= 3.5625$$

$$x_5^2 = \frac{45}{9}(-x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 - 2x_4^2)$$

$$= \frac{45}{9}(-\ -0.4296\ - 2\ 4.7932\ - 3\ 3.2544\ - 2\ 3.5625\ )$$

$$= 2.1061$$

Iterasi selanjutnya dapat dilihat pada Tabel 2.1 di bawah ini:

Tabel 2.1. Hasil Iterasi Contoh 2.4

Iterasi	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	0	0	0	0	0
1	2.5000	4.4444	2.8651	3.7738	1.9409
2	-0.4296	4.7932	3.2544	3.5625	2.1061
3	-0.5120	4.7917	3.2965	3.5265	2.1096

4	-0.5092	4.7894	3.3003	3.5250	2.1088
5	-0.5092	4.7892	3.3007	3.5252	2.1087
6	-0.5094	4.7892	3.3007	3.5253	2.1087
7	-0.5094	4.7892	3.3007	3.5253	2.1087

Berdasarkan tabel iterasi di atas, maka solusi dari sistem persamaan liniernya adalah: $x_1 = -0.5094$, $x_2 = 4.7892$, dan $x_3 = 3.3007$, $x_4 = 3.5253$, $x_5 = 2.1087$.

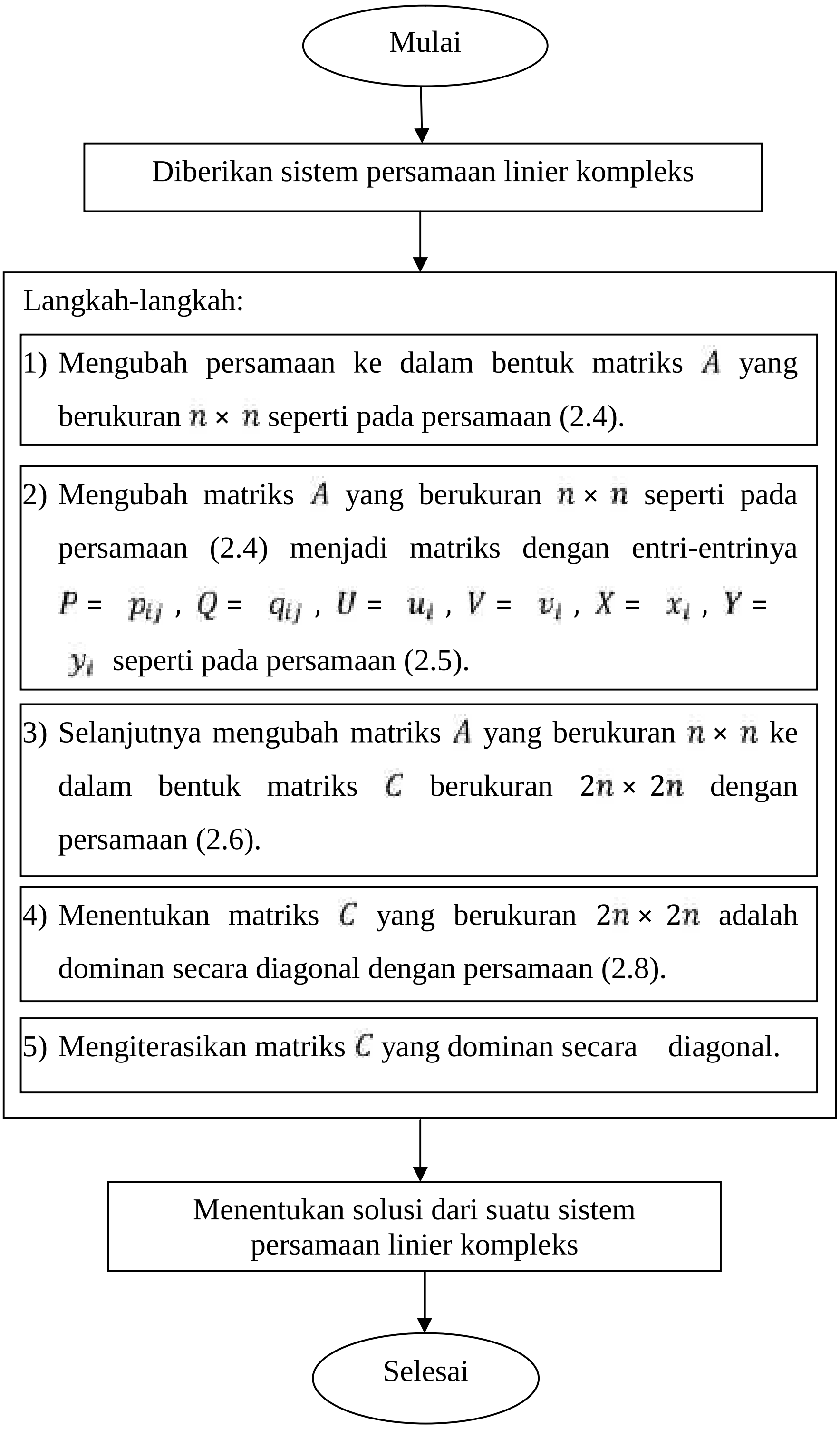
Karena jika diteruskan sampai iterasi ke-*n* maka hasilnya akan sama dengan iterasi sebelumnya.

BAB III
METODOLOGI PENELITIAN

Adapun metode penelitian yang penulis gunakan adalah metode studi literatur dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1) Terlebih dahulu diketahui sistem persamaan linier kompleks.
2) Mengubah persamaan ke dalam bentuk matriks A yang berukuran $n \times n$ seperti pada persamaan (2.4).
3) Mengubah matriks A yang berukuran $n \times n$ seperti pada persamaan (2.4) menjadi matriks dengan entri-entrinya $P = p_{ij}$, $Q = q_{ij}$, $U = u_i$, $V = v_i$, $X = x_i$, $Y = y_i$ seperti pada persamaan (2.5).
4) Selanjutnya mengubah matriks A yang berukuran $n \times n$ ke dalam bentuk matriks C berukuran $2n \times 2n$ dengan persamaan (2.6)
5) Menentukan matriks C yang berukuran $2n \times 2n$ adalah dominan secara diagonal dengan persamaan (2.8).
6) Mengiterasikan matriks C yang dominan secara diagonal.
7) Mendapatkan solusi dari suatu sistem persamaan linier kompleks.

Langkah-langkah metode penelitian diatas dapat digambarkan dalam *flowchart* sebagai berikut:



Gambar 3.1 *Flowchart* Metode Penelitian

BAB IV

PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINIER KOMPLEKS MENGGUNAKAN METODE ITERASI *GAUSS-SEIDEL*

Berikut ini akan dijelaskan bagaimana metode iterasi *Gauss-Seidel* dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linier kompleks. Seperti yang telah diketahui bahwa sistem persamaan linier dapat dibentuk ke dalam persamaan matriks $AX = B$ dengan A merupakan matriks koefisien yang akan dicari bentuk *Gauss-Seidel*-nya dan selanjutnya akan ditentukan solusi nilai x dari sistem persamaannya.

Langkah-langkah yang dilakukan dalam menyelesaikan sistem persamaan linier kompleks menggunakan iterasi *Gauss-Seidel* adalah sebagai berikut:

1. Mengubah sistem persamaan linier kompleks menjadi bentuk matriks yang berkoefisien A yang berukuran $n \times n$.

   Selanjutnya mengubah matriks A menjadi matriks yang berukuran $2n \times 2n$ dan didapat matriks C yang baru.
2. Menetukan bahwa matriks C yang berukuran $2n \times 2n$ adalah dominan secara diagonal.

   Selanjutnya mengiterasikan matriks C yang berukuran $2n \times 2n$ sampai iterasi yang telah ditentukan.
3. Dengan menggunakan metode iterasi *Gauss-Seidel* untuk menyelesaikan matriks C, maka didapatkan solusinya.

   Selanjutnya, akan diberikan contoh penyelesaian sistem persamaan linier kompleks dengan menggunakan metode iterasi *Gauss-Seidel*.

Contoh 4.1: (Untuk kasus $m = n = 4$)

Diberikan sistem persamaan linier kompleks berikut:

$$18 + 3i\ x_1 + \quad 1 - 2i\ x_2 + \quad 3 - i\ x_3 + \quad 4 + 3i\ x_4 = 4 - 3i$$
$$1 - 2i\ x_1 + \quad 17 + 2i\ x_2 + \quad 3 + 2i\ x_3 + \quad 5 - i\ x_4 = 5 - 2i$$
$$2 + 2i\ x_1 + \quad 2 + i\ x_2 + \quad 16 + i\ x_3 + \quad 3 - 3i\ x_4 = 6 - 2i$$
$$2 - i\ x_1 + \quad 2 - 2i\ x_2 + \quad 2 + 2i\ x_3 + \quad 15 + 2i\ x_4 = 7 - 3i$$

Selesaikan sistem persamaan linier kompleks di atas dengan menggunakan metode iterasi *Gauss-Seidel* dengan nilai titik awal variabel yaitu $x_1^0 = x_2^0 = x_3^0 = x_4^0 = y_1^0 = y_2^0 = y_3^0 = y_4^0 = 0$.

Penyelesaian:

Berdasarkan soal di atas maka sistem persamaan linier kompleks tersebut dibentuk kedalam matriks $AX = B$ menjadi:

$$\begin{matrix} 18+3i & 1-2i & 3-i & 4+3i \\ 1-2i & 17+2i & 3+2i & 5-i \\ 2+2i & 2+i & 16+i & 3-3i \\ 2-i & 2-2i & 2+2i & 15+2i \end{matrix} \quad \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} = \begin{matrix} 4-3i \\ 5-2i \\ 6-2i \\ 7-3i \end{matrix}$$

Selanjutnya, dari persamaan (2.5) maka akan diperoleh matriks sebagai berikut:

$$P = \begin{matrix} 18 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 17 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 16 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 15 \end{matrix}, \quad Q = \begin{matrix} 3 & -2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & 2 & 2 \end{matrix}, \quad U = \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix}$$

$$V = \begin{matrix} -3 \\ -2 \\ -2 \\ -3 \end{matrix}, \quad X = \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix}, \quad Y = \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{matrix}$$

Selanjutnya mengubah matriks P, Q, U, V, X dan Y ke dalam bentuk matriks $CZ = W$ berdasarkan persamaan (2.6):

$$\begin{matrix} 18 & 1 & 3 & 4 & -3 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 17 & 3 & 5 & 2 & -2 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 16 & 3 & -2 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 15 & 1 & 2 & -2 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & 3 & 18 & 1 & 3 & 4 \\ -2 & 2 & 2 & -1 & 1 & 17 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & -3 & 2 & 2 & 16 & 3 \\ -1 & -2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 15 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{matrix} = \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ -3 \\ -2 \\ -2 \\ -3 \end{matrix}$$

Selanjutnya kita iterasikan matriks baru tersebut menggunakan persamaan (2.7), dengan syarat harus memenuhi persamaan (2.8) akan diperoleh nilai:

Iterasi 1:

$$\begin{aligned} x_1^1 &= \frac{4}{18}(-x_2^0 - 3x_3^0 - 4x_4^0 + 3y_1^0 - 2y_2^0 - y_3^0 + 3y_4^0) \\ &= \frac{4}{18}(0 - 0 - 0 + 0 - 0 - 0 + 0) \\ &= 0.2222 \end{aligned}$$

$$x_2^1 = \frac{5}{17}(-x_1^1 - 3x_3^0 - 5x_4^0 - 2y_1^0 + 2y_2^0 + 2y_3^0 - y_4^0)$$
$$= \frac{5}{17}(-0.2222 - 0 - 0 - 0 + 0 + 0 - 0)$$
$$= 0.2810$$
$$x_3^1 = \frac{6}{16}(-2x_1^1 - 2x_2^1 - 3x_4^0 + 2y_1^0 + y_2^0 + y_3^0 - 3y_4^0)$$
$$= \frac{6}{16}(-2\ \ 0.2222\ \ - 2\ \ 0.2810\ \ - 0 + 0 + 0 + 0 - 0)$$
$$= 0.3121$$
$$x_4^1 = \frac{7}{15}(-2x_1^1 - 2x_2^1 - 2x_3^1 - y_1^0 - 2y_2^0 + 2y_3^0 + 2y_4^0)$$
$$= \frac{7}{15}(-2\ \ 0.2222\ \ - 2\ \ 0.2810\ \ - 2\ \ 0.3121\ \ - 0 - 0 + 0 + 0)$$
$$= 0.3580$$

Selanjutnya, mencari nilai y menggunakan persamaan (2.7) dengan syarat harus memenuhi persamaan (2.8):

$$y_1^1 = \frac{-3}{18}(-3x_1^1 + 2x_2^1 + x_3^1 - 3x_4^1 - y_2^0 - 3y_3^0 - 4y_4^0)$$
$$= \frac{-3}{18}(-3\ \ 0.2222\ \ + 2\ \ 0.2810\ \ + 0.3121 - 3(0.3580) - 0 - 0 - 0)$$
$$= -0.2148$$
$$y_2^1 = \frac{-2}{17}(2x_1^1 - 2x_2^1 - 2x_3^1 + x_4^1 - y_1^1 - 3y_3^0 - 5y_4^0)$$
$$= \frac{-2}{17}(2\ \ 0.2222\ \ - 2\ \ 0.2810\ \ - 2\ \ 0.3121\ \ + 0.3580 - (-0.2148) - 0$$
$$- 0)$$
$$= -0.1276$$
$$y_3^1 = \frac{-2}{16}(-2x_1^1 - x_2^1 - x_3^1 + 3x_4^1 - 2y_1^1 - 2y_2^1 - 3y_4^0)$$
$$= \frac{-2}{16}(-2\ \ 0.2222\ \ - 0.2810 - 0.3121 + 3\ \ 0.3580\ \ - 2\ \ -0.2148$$
$$-2\ \ -0.1276\ \ - 0)$$
$$= -0.0799$$

$$y_4^1 = \frac{-3}{15}(x_1^1 + 2x_2^1 - 2x_3^1 - 2x_4^1 - 2y_1^1 - 2y_2^1 - 2y_3^1)$$

$$= \frac{-3}{15}(0.2222 + 2\ 0.2810\ - 2\ 0.3121\ - 2\ 0.3580\ - 2\ -0.2148$$

$$-2\ -0.1276\ - 2\ -0.0799\ )$$

$$= -0.1808$$

Selanjutnya mencari nilai iterasi ke 2 menggunakan persamaan (2.7) dengan syarat harus memenuhi persamaan (2.8) akan diperoleh nilai:

Iterasi 2:

$$x_1^2 = \frac{4}{18}(-x_2^1 - 3x_3^1 - 4x_4^1 + 3y_1^1 - 2y_2^1 - y_3^1 + 3y_4^1)$$

$$= \frac{4}{18}(-0.2810 - 3\ 0.3121\ - 4\ 0.3580\ + 3\ -0.2148\ - 2\ -0.1276$$

$$-0.0799 + 3\ -0.1808\ )$$

$$= 0.0277$$

$$x_2^2 = \frac{5}{17}(-x_1^2 - 3x_3^1 - 5x_4^1 - 2y_1^1 + 2y_2^1 + 2y_3^1 - y_4^1)$$

$$= \frac{5}{17}(-0.0277 - 3\ 0.3121\ - 5\ 0.3580\ - 2\ -0.2148\ + 2\ -0.1276\ )$$

$$+2\ -0.0799\ -\ \ -0.1808\ )$$

$$= 0.1435$$

$$x_3^2 = \frac{6}{16}(-2x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_4^1 + 2y_1^1 + y_2^1 + y_3^1 - 3y_4^1)$$

$$= \frac{6}{16}(-2\ 0.0277\ - 2\ 0.1435\ - 3\ 0.3580\ + 2\ -0.2148\ +\ \ -0.1276$$

$$+\ \ -0.0799\ - 3\ -0.1808\ )$$

$$= 0.2805$$

$$x_4^2 = \frac{7}{15}(-2x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 - y_1^1 - 2y_2^1 + 2y_3^1 + 2y_4^1)$$

$$= \frac{7}{15}(-2\ 0.0277\ - 2\ 0.1435\ - 2\ 0.2805\ -\ \ -0.2148\ - 2\ -0.1276$$

$$+2\ -0.0799\ +\ \ -0.1808\ )$$

$$= 0.4030$$

Selanjutnya, mencari nilai y menggunakan persamaan (2.7) dengan syarat harus memenuhi persamaan (2.8):

$$y_1^2 = \frac{-3}{18}(-3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 3x_4^2 - y_2^1 - 3y_3^1 - 4y_4^1)$$

$$= \frac{-3}{18}(-3\ 0.0277\ + 2\ 0.1435\ + 0.2805 - 3\ 0.4030\ -\ -0.1276$$

$$-3\ -0.0799\ - 4(-0.1808))$$

$$= -0.1464$$

$$y_2^2 = \frac{-2}{17}(2x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 + x_4^2 - y_1^2 - 3y_3^1 - 5y_4^1)$$

$$= \frac{-2}{17}(2\ 0.0277\ - 2\ -0.1435\ - 2\ 0.2805\ + 0.4030 -\ -0.1464$$

$$-3\ -0.0799\ - 5\ -0.1808\ )$$

$$= -0.0647$$

$$y_3^2 = \frac{-2}{16}(-2x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 3x_4^2 - 2y_1^2 - 2y_2^2 - 3y_4^1)$$

$$= \frac{-2}{16}(-2\ 0.0277\ - 0.1435 - 0.2805 + 3\ 0.4030\ - 2\ -0.1464$$

$$-2\ -0.0647\ - 3\ -0.1808\ )$$

$$= -0.0191$$

$$y_4^2 = \frac{-3}{15}(x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 - 2x_4^2 - 2y_1^2 - 2y_2^2 - 2y_3^2)$$

$$= \frac{-3}{15}(0.0277 + 2\ 0.1436\ - 2\ 0.2805\ - 2\ 0.4030\ - 2\ -0.1464$$

$$-2\ -0.0647\ - 2\ -0.0191\ )$$

$$= -0.2394$$

Iterasi selanjutnya bisa dilihat pada tabel 4.1 di bawah ini:

Tabel 4.1 Hasil Iterasi Contoh 4.1

Iterasi	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4
	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0.2222	0.2810	0.3121	0.3580	-0.2148	-0.1276	-0.0799	-0.1807
2	0.0277	0.1435	0.2805	0.4030	-0.1464	-0.0647	-0.0191	-0.2394
3	0.0219	0.1463	0.2998	0.3882	-0.1421	-0.0626	-0.0124	-0.2418
4	0.0215	0.1478	0.3039	0.3875	-0.1422	-0.0639	-0.0122	-0.2419
5	0.0210	0.1472	0.3042	-0.3878	-0.1422	-0.0639	-0.0120	-0.2421
6	0.0208	0.1471	0.3042	0.3879	-0.1422	-0.0639	-0.0120	-0.2421
7	0.0208	0.1472	0.3042	0.3879	-0.1422	-0.0639	-0.0120	-0.2421
8	0.0208	0.1472	0.3042	0.3879	-0.1422	-0.0639	-0.0120	-0.2421

Berdasarkan tabel iterasi di atas, maka solusi dari sistem persamann linier kompleksnya adalah: $x_1 = 0.0208$, $x_2 = 0.1472$, $x_3 = 0.3042$, $x_4 = 0.3879$, $y_1 = -0.1422$, $y_2 = -0.0639$, $y_3 = -0.0120$, dan $y_4 = -0.2421$.

Sehingga solusi nilai z untuk sistem persamaan linier kompleks yang diberikan berdasarkan nilai x dan y yang diperoleh maka:

$$z_1 = 0.0208 - 0.1422i$$

$$z_2 = 0.1472 - 0.0639i$$

$$z_3 = 0.3042 - 0.0120i$$

$$z_4 = 0.3879 - 0.2421i$$

Contoh 4.2: (Untuk kasus $m = n = 5$)

Diberikan sistem persamaan linier kompleks berikut:

$$\begin{array}{l}
25 + 8i\ x_1 + \quad 2 - 6i\ x_2 + \quad 3 - 2i\ x_3 + \quad 4 + 2i\ x_4 + \quad 2 - i\ x_5 = 23 + 3i \\
2 - i\ x_1 + \quad 30 + 7i\ x_2 + \quad 2 - 2i\ x_3 + \quad 5 - 2i\ x_4 + \quad 3 + 5i\ x_5 = 25 - 2i \\
3 + 3i\ x_1 + \quad 5 + 3i\ x_2 + \quad 40 + 6i\ x_3 + \quad 6 - i\ x_4 + \quad 5 + 2i\ x_5 = 29 + 2i \\
7 + 2i\ x_1 + \quad 3 - 2i\ x_2 + \quad 5 + i\ x_3 + \quad 45 + 5i\ x_4 + \quad 6 - 3i\ x_5 = 30 - 2i \\
6 - 3i\ x_1 + \quad 8 - 2i\ x_2 + \quad 2 + 2i\ x_3 + \quad 7 + 5i\ x_4 + \quad 50 + 4i\ x_5 = 36 + 3i
\end{array}$$

Selesaikan sistem persamaan linier kompleks di atas dengan menggunakan metode iterasi *Gauss-Seidel* dengan nilai titik awal variabel yaitu $x_1^0 = x_2^0 = x_3^0 = x_4^0 = x_5^0 = y_1^0 = y_2^0 = y_3^0 = y_4^0 = y_5^0 = 0$.

Penyelesaian:

Berdasarkan soal diatas maka sistem persamaan linier kompleks tersebut dibentuk kedalam matriks $AX = B$ menjadi:

$$\begin{array}{ccccc}
25 + 8i & 2 - 6i & 3 - 2i & 4 + 2i & 2 - i \\
2 - i & 30 + 7i & 2 - 2i & 5 - 2i & 3 + 5i \\
3 + 3i & 5 + 3i & 40 + 6i & 6 - i & 5 + 2i \\
7 + 2i & 3 - 2i & 5 + i & 45 + 5i & 6 - 3i \\
6 - 3i & 8 - 2i & 2 + 2i & 7 + 5i & 50 + 4i
\end{array}
\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array}
=
\begin{array}{c} 23 + 3i \\ 25 + 2i \\ 29 + 4i \\ 30 + 2i \\ 36 + 3i \end{array}$$

Selanjutnya, dari persamaan (2.5) maka akan diperoleh matriks sebagai berikut:

$$P = \begin{array}{ccccc}
25 & 2 & 3 & 4 & 2 \\
2 & 30 & 2 & 5 & 3 \\
3 & 5 & 40 & 6 & 5 \\
7 & 3 & 5 & 45 & 6 \\
6 & 8 & 2 & 7 & 50
\end{array}, \qquad
Q = \begin{array}{ccccc}
8 & -6 & -2 & 2 & -1 \\
-1 & 7 & -2 & -2 & 5 \\
3 & 3 & 6 & -1 & 2 \\
2 & -2 & 1 & 5 & -3 \\
-3 & -2 & 2 & 5 & 4
\end{array}$$

$$U = \begin{bmatrix} 23 \\ 25 \\ 29 \\ 30 \\ 36 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya mengubah matriks P, Q, U, V, X dan Y ke dalam bentuk matriks pada persamaan (2.6):

$$\begin{bmatrix} 25 & 2 & 3 & 4 & 2 & -8 & 6 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 30 & 2 & 5 & 3 & 1 & -7 & 2 & 2 & -5 \\ 3 & 5 & 40 & 6 & 5 & -3 & -3 & -6 & 1 & -2 \\ 7 & 3 & 5 & 45 & 6 & -2 & 2 & -1 & -5 & 3 \\ 6 & 8 & 2 & 7 & 50 & 3 & 2 & -2 & -5 & -4 \\ 8 & -6 & -2 & 2 & -1 & 25 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ -1 & 7 & -2 & -2 & 5 & 2 & 30 & 2 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 6 & -1 & 2 & 3 & 5 & 40 & 6 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & 5 & -3 & 7 & 3 & 5 & 45 & 6 \\ -3 & -2 & 2 & 5 & 4 & 6 & 8 & 2 & 7 & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ 25 \\ 29 \\ 30 \\ 36 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya kita iterasikan matriks baru tersebut menggunakan persamaan (2.7) dengan syarat harus memenuhi persamaan (2.8) akan diperoleh nilai:

Iterasi 1:

$$x_1^1 = \frac{23}{25}(-2x_2^0 - 3x_3^0 - 4x_4^0 - 2x_5^0 + 8y_1^0 - 6y_2^0 - 2y_3^0 + 2y_4^0 - y_5^0)$$
$$= \frac{23}{25}(0 - 0 - 0 - 0 + 0 - 0 - 0 + 0 - 0)$$
$$= 0.9200$$

$$x_2^1 = \frac{25}{30}(-2x_1^1 - 2x_3^0 - 5x_4^0 - 3x_5^0 - y_1^0 + 7x_2^0 - 2x_3^0 - 2x_4^0 + 5x_5^0)$$
$$= \frac{25}{30}(-2(0.9200) - 0 - 0 - 0 - 0 + 0 - 0 - 0 + 0)$$
$$= 0.7720$$

$$x_3^1 = \frac{29}{40}(-3x_1^1 - 5x_2^1 - 6x_4^0 - 5x_5^0 + 3y_1^0 + 3x_2^0 + 6x_3^0 - x_4^0 + 2x_5^0)$$
$$= \frac{29}{40}(-3\ 0.9200\ -5\ 0.7720\ - 0 - 0 + 0 + 0 + 0 - 0 + 0)$$
$$= 0.5595$$

$$x_4^1 = \frac{30}{45}(-7x_1^1 - 3x_2^1 - 5x_3^1 - 6x_5^0 + 2y_1^0 - 2y_2^0 + y_3^0 + 5y_4^0 - 3y_5^0)$$
$$= \frac{30}{45}(-7\ 0.9200\ -3\ 0.7720\ -5\ 0.5595\ - 0 - 0 - 0 + 0 + 0 - 0)$$
$$= 0.4099$$

$$x_5^1 = \frac{36}{50}(-6x_1^1 - 8x_2^1 - 2x_3^1 - 7x_4^1 - 3y_1^0 - 2y_2^0 + 2y_3^0 + 5y_4^0 + 4y_5^0)$$

$$= \frac{36}{50}(-6\ 0.9200\ -8\ 0.7720\ -2\ 0.5595\ -7\ 0.4099\ -0-0+0+0$$

$$+0)$$

$$= 0.4063$$

Selanjutnya, mencari nilai y menggunakan persamaan (2.7) dengan syarat harus memenuhi persamaan (2.8):

$$y_1^1 = \frac{3}{25}(-8x_1^1 + 6x_2^1 + 2x_3^1 - 2x_4^1 + x_5^1 - 2y_2^0 - 3y_3^0 - 4y_4^0 - 2y_5^0)$$

$$= \frac{3}{25}(-8\ 0.9200\ +6\ 0.7720\ +2\ 0.5595\ -2\ 0.4099\ +0.4063-0$$

$$-0-0-0)$$

$$= 0.0391$$

$$y_2^1 = \frac{2}{30}(x_1^1 - 7x_2^1 + 2x_3^1 + 2x_4^1 - 5x_5^1 - 2y_1^1 - 2y_3^0 - 5y_4^0 - 3y_5^0)$$

$$= \frac{2}{30}(0.9200-7\ 0.7720\ +2\ 0.5595\ -5\ 0.4063\ -2\ 0.0391\ -0-0$$

$$-0)$$

$$= -0.0885$$

$$y_3^1 = \frac{4}{40}(-3x_1^1 - 3x_2^1 - 6x_3^1 + x_4^1 - 2x_5^1 - 3y_1^1 - 5y_2^1 - 6y_4^0 - 5y_5^0)$$

$$= \frac{4}{40}(-3\ 0.9200\ -3\ 0.7720\ -6\ 0.5595\ +0.4099-2\ 0.4063$$

$$-3\ 0.0391\ -5\ -0.0885\ -0-0)$$

$$= -0.1128$$

$$y_4^1 = \frac{2}{45}(-2x_1^1 + 2x_2^1 - x_3^1 - 5x_4^1 + 3x_5^1 - 7y_1^1 - 3y_2^1 - 5y_3^1 - 6y_5^0)$$

$$= \frac{2}{45}(-2\ 0.9200\ +2\ 0.7720\ -0.5595-5\ 0.4099\ +3\ 0.4063$$

$$-7\ 0.0391\ -3\ -0.0885\ -5\ -0.1128\ -0)$$

$$= 0.0193$$

$$y_5^1 = \frac{3}{50}(+3x_1^1 + 2x_2^1 - 2x_3^1 - 5x_4^1 - 4x_5^1 - 6y_1^1 - 8y_2^1 - 2y_3^1 - 7y_4^0)$$

$$= \frac{3}{50}(3\ 0.9200\ +2\ 0.7720\ -2\ 0.5595\ -5\ 0.4099\ -4\ 0.4063$$

$$-6\ 0.0391\ -8\ -0.0885\ -2\ -0.1128\ -7(0.0193)$$
$$= 0.0615$$

Selanjutnya mencari nilai iterasi ke 2 menggunakan persamaan (2.7) dengan syarat harus memenuhi persamaan (2.8) akan diperoleh nilai:

Iterasi 2:

$$x_1^2 = \frac{23}{25}(-2x_2^1 - 3x_3^1 - 4x_4^1 - 2x_5^1 + 8y_1^1 - 6y_2^1 - 2y_3^1 + 2y_4^1 - y_5^1)$$
$$= \frac{23}{25}(-2\ 0.7720\ -3\ 0.5595\ -4\ 0.4099\ -2\ 0.4063\ +8\ 0.0391$$
$$-6\ -0.0885\ -2\ -0.1128\ +2\ 0.0193\ -0.0615)$$
$$= 0.7347$$
$$x_2^2 = \frac{25}{30}(-2x_1^2 - 2x_3^1 - 5x_4^1 - 3x_5^1 - y_1^1 + 7y_2^1 - 2y_3^1 - 2y_4^1 + 5y_5^1)$$
$$= \frac{25}{30}(-2\ 0.7347\ -2\ 0.5595\ -5\ 0.4099\ -3\ 0.4063\ -0.0391$$
$$+7\ -0.0885\ -2\ -0.1128\ -2\ 0.0193\ +5\ 0.0615\ )$$
$$= 0.6326$$
$$x_3^2 = \frac{29}{40}(-3x_1^2 - 5x_2^2 - 6x_4^1 - 5x_5^1 + 3y_1^1 + 3y_2^1 + 6y_3^1 - y_4^1 + 2y_5^1)$$
$$= \frac{29}{40}(-3\ 0.0747\ -5\ 0.6326\ -6\ 0.4099\ -5\ 0.4063\ +3\ 0.0391$$
$$+3\ -0.0885\ +6\ -0.1128\ -0.0193 + 2(0.0615))$$
$$= 0.4605$$
$$x_4^2 = \frac{30}{45}(-7x_1^2 - 3x_2^2 - 5x_3^2 - 6x_5^1 + 2y_1^1 - 2y_2^1 + y_3^1 + 5y_4^1 - 3y_5^1)$$
$$= \frac{30}{45}(-7\ 0.7347\ -3\ 0.6326\ -5\ 0.4605\ -6\ 0.4063\ +2\ 0.0391$$
$$-2\ -0.0885\ +0.1128 + 5\ 0.0193\ -3\ 0.0615\ )$$
$$= 0.4060$$
$$x_5^2 = \frac{36}{50}(-6x_1^2 - 8x_2^2 - 2x_3^2 - 7x_4^2 - 3y_1^1 - 2y_2^1 + 2y_3^1 + 5y_4^1 + 4y_5^1)$$
$$= \frac{36}{50}(-6\ 0.7347\ -8\ 0.6326\ -2\ 0.4605\ -7\ 0.4060\ -3\ 0.0391$$
$$-2\ -0.0885\ +2\ -0.01128\ +5\ 0.0193\ +4\ 0.0615\ )$$
$$= 0.4588$$

Selanjutnya, mencari nilai y menggunakan persamaan (2.7) dengan syarat harus memenuhi persamaan (2.8):

$$y_1^2 = \frac{3}{25}(-8x_1^2 + 6x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_4^2 + x_5^2 - 2y_2^1 - 3y_3^1 - 4y_4^1 - 2y_5^1)$$

$$= \frac{3}{25}(-8\ 0.7347\ +6\ 0.6326\ +2\ 0.4605\ -2\ 0.4060\ +0.4588$$

$$-2\ -0.0885\ -3\ -0.1128\ -4\ 0.0193\ -2\ 0.0615\ )$$

$$= 0.0720$$

$$y_2^2 = \frac{2}{30}(x_1^2 - 7x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 - 5x_5^2 - 2y_1^2 - 2y_3^1 - 5y_4^1 - 3y_5^1)$$

$$= \frac{2}{30}(0.7347 - 7\ 0.6326\ +2\ 0.4605\ -2\ 0.4060\ -5\ 0.4588$$

$$-2\ 0.0720\ -2\ -0.1128\ -5\ 0.0193\ -3\ 0.0615\ )$$

$$= -0.0820$$

$$y_3^2 = \frac{4}{40}(-3x_1^2 - 3x_2^2 - 6x_3^2 + x_4^2 - 2x_5^2 - 3y_1^2 - 5y_2^2 - 6y_4^1 - 5y_5^1)$$

$$= \frac{4}{40}(-3\ 0.7347\ -3\ 0.6326\ -6\ 0.4605\ +0.4060 - 2\ 0.4588$$

$$-3\ 0.0720\ -5\ -0.0820\ -6\ 0.0193\ -5\ 0.0615\ )$$

$$= -0.0902$$

$$y_4^2 = \frac{2}{45}(-2x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 5x_4^2 + 3x_5^2 - 7y_1^2 - 3y_2^2 - 5y_3^2 - 6y_5^1)$$

$$= \frac{2}{45}(-2\ 0.7347\ +2\ 0.6326\ -0.4605 - 5\ 0.4060\ +3\ 0.4588$$

$$-7\ 0.0720\ -3\ -0.0820\ -5\ -0.0902\ -6\ 0.0402\ )$$

$$= 0.0112$$

$$y_5^2 = \frac{3}{50}(3x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 - 5x_4^2 - 4x_5^2 - 6y_1^2 - 8y_2^2 - 2y_3^2 - 7y_4^2)$$

$$= \frac{3}{50}(3\ 0.7347\ +2\ 0.6326\ -2\ 0.4505\ -5\ 0.4060\ -4\ 0.4588\ -6\ 0.0720$$

$$-8\ -0.0902\ -2\ -0.0902\ -7\ 0.0112\ )$$

$$= 0.0402$$

Iterasi selanjutnya bisa dilihat pada tabel 4.2 di bawah ini:

Tabel 4.2 Hasil Iterasi Contoh 4.2

Iterasi	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0.9200	0.7720	0.5595	0.4099	0.4063	0.0391	-0.0885	-0.1128	0.0193	0.0615
2	0.7347	0.6326	0.4605	0.4060	0.4588	0.0720	-0.0818	-0.0902	0.0112	0.0402
3	0.7615	0.6288	0.4585	0.3975	0.4537	0.0626	-0.0773	-0.0876	0.0142	0.0428
4	0.7597	0.6325	0.4602	0.3976	0.4542	0.0628	-0.0791	-0.0886	0.0143	0.0430
5	0.7599	0.6319	0.4599	0.3977	0.4544	0.0629	-0.0790	-0.0885	0.0142	0.0430
6	0.7599	0.6319	0.4599	0.3977	0.4543	0.0629	-0.0790	-0.0885	0.0142	0.0430
7	0.7599	0.6319	0.4599	0.3977	0.4543	0.0629	-0.0790	-0.0885	0.0142	0.0430
8	0.7599	0.6319	0.4599	0.3977	0.4543	0.0629	-0.0790	-0.0885	0.0142	0.0430

Berdasarkan tabel iterasi di atas, maka solusi dari sistem persamaan linier kompleksnya adalah: $x_1 = 0.7599$, $x_2 = 0.6319$, $x_3 = 0.4599$, $x_4 = 0.3977$, $x_5 = 0.4543$, $y_1 = 0.0629$, $y_2 = -0.0790$, $y_3 = -0.0885$, $y_4 = 0.0142$, dan $y_5 = 0.0430$.

Solusi nilai z untuk sistem persamaan linier kompleks yang diberikan berdasarkan nilai x dan y yang diperoleh maka:

$z_1 = 0.7599 + 0.0629i$

$z_2 = 0.6319 - 0.0790i$

$z_3 = 0.4599 - 0.0885i$

$z_4 = 0.3977 + 0.0142i$

$z_5 = 0.4543 + 0.0430i$

BAB V
KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab IV, diperoleh hasil penelitian yaitu metode iterasi *Gauss-Seidel* dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linier kompleks dengan bentuk umum persamaan *Gauss-Seidel*nya:

$$x_i^{(n+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{\,n+1} - \sum_{j=i+1}^{N} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(n)}$$

dengan nilai awal $x_0 = 0$. Sedangkan sistem persamaan linier kompleksnya menggunakan persamaan:

$$\sum_{j=1}^{n} \left(p_{ij} + iq_{ij}\right)\left(x_i + iy_i\right) = u_i + iv_i$$

sehingga didapat matriks baru, yaitu:

$$\begin{bmatrix} P & -Q \\ Q & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}$$

Berdasarkan contoh 4.1 yang diberikan pada pembahasan maka didapat solusinya adalah:

$z_1 = 0.0208 - 0.1422i$

$z_2 = 0.1472 - 0.0639i$

$z_3 = 0.3042 - 0.0120i$

$z_4 = 0.3879 - 0.2421i$

Sedangka untuk contoh 4.2 solusinya adalah:

$z_1 = 0.7599 + 0.0629i$

$z_2 = 0.6319 - 0.0790i$

$z_3 = 0.4599 - 0.0885i$

$z_4 = 0.3977 + 0.0142i$

$z_5 = 0.4543 + 0.0430i$

5.2 Saran

Tugas akhir ini, penulis menggunakan metode iterasi *Gauss-Seidel* untuk menyelesaikan sistem persamaan linier kompleks, diharapkan bagi pembaca yang berminat dapat menggunakan metode lain untuk menyelesaikan sistem persamaan linier kompleks.

DAFTAR PUSTAKA

Churchill, Ruel V, dan James Ward Brown. "*Complex Variables and Applications*". Fifth Edition. McGraw-Hill, Singapore. 1990.

Khairuddin. "*Pengaruh Struktur Matriks Iterasi Pada Metode Gauss-Seidel*".2006.

Munif, Abdul dan Aries H. Prastyoko. "*Metode Numerik*". Edisi Kedua. Surabaya. 1995.

Nicholson. "*Penyelesaian Sistem Persamaan Linier Kompleks dengan Menggunakan Operasi Baris Elementer (OBE)*." 2001.

Rovelim, Juanda. "*Perbandingan Metode Eliminasi Gauss, Gauss-Seidel, dan Stepeest Decent dalam Menyelesaikan Linier Linier Simultan*". 2006.

Sahid. "*Pengantar Komputasi Numerik dengan MATLAB*". Yogyakarta. 2005.

Taher Rahgoy, dkk. "*Fuzzy Complex System of Linear Equation Applied to Circuit Analysis*". Vol.1, no.5, December, 2009.